Теоретико-топосный подход к описанию ветвящегося пространства-времени (2). Локальные квантовые логики

Л.В. Ильичёв*

Аннотация

С использованием топосного подхода к ветвящемуся пространству-времени в трактовке Н.Белнапа введены логические структуры, несущие черты квантовых логик. А именно, в рамках семантики Крипке, в которой возможные миры являются мирами Белнапа, для каждого события определена ортокомплементарная решётка, представляющая некоторую локальную ортологику. Последняя известна также как "минимальная квантовая логика", т.к. несёт основные черты решётки замкнутых подпространств гильбертова пространства квантовой системы. Высказывания локальной ортологики являются определёнными подмножествами множества миров Белнапа, в котором обнаруживает себя локальный наблюдатель. В этом множестве введена естественная (локальная) топология, относительно которой высказывания оказываются замкнутыми.

Ключевые слова: топос, предпучок, причинное множество, ортокомплементарная решётка, квантовые логики

1 Введение

В работе [1] было предложено категорное оформление идеи ветвящегося пространства-времени Белнапа [2]. С определёнными объектами и морфизмами категории (топоса) $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ контравариантных функторов из категории $\mathcal{C}$ всех событий в категорию множеств Set связываются различные совокупности миров Белнапа, понимаемых как возможные глобальные сценарии развития случайного Мира, и их отображения. В рамках топосного подхода в модель ветвящегося пространства-времени оказалась привнесена присущая топосам неклассическая (интуиционистская) логика. Истинность высказываний возникающей логики по отношению к локализованному наблюдателю в общем случае многозначна.

В развиваемом топосном подходе возможны поиски логических структур, ассоциируемых с квантовыми свойствами реальности. Актуальность данной задачи очевидна, т.к. понятие ветвления классического пространства-времени желательно естественным образом сопоставить с квантовым вариантом понятие ветвления из трактовки Эверетта. Для этого надо обнаружить в формализме ветвящегося пространства-времени структуры, родственные структурам и понятиям квантового формализма.

*Новосибирский государственный университет, Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: leonid@iae.nsk.su

В настоящей работе делаются первоначальные простые и практически очевидные шаги в данном направлении.

Рассмотрим кратко истоки особой логики квантовых теорий в сравнении с логикой классической физики. Воспроизведём цепочку рассуждений, часто используемую Дюрингом и Ишамом [3] для несколько иных целей. Как известно, классическая (булева) логика имеет простую модель своей реализации – классическую теорию множеств. С каждым высказыванием ассоциируется подмножество некоторого исходного множества. Логические связки конъюнкции и дизъюнкции моделируются, соответственно, пересечением и объединением подмножеств. Отрицанию соответствует дополнительное множество. Привычная для классической логики дистрибутивность конъюнкции и дизъюнкции очевидным образом ассоциируются с дистрибутивностью операций пересечения и объединения. В классической физике истоки данной модели проследить достаточно легко. Рассмотрим с этой целью наблюдаемую величину A некоторой классической системы (например, совокупности n материальных точек). По своему смыслу наблюдаемая A есть функция из совокупности $\mathcal{S}$ всех возможных состояний системы во множество действительных чисел:

$$A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}. \tag{1}$$

В случае системы из n материальных точек без связей в трёхмерном пространстве совокупность состояний $\mathcal{S}$ представляет собой симплектическое многообразие $\mathbb{R}^{6n}$. Высказыванию "$A \in \Delta$"("Значение наблюдаемой A лежит в Δ"), где Δ есть некоторое борелево подмножество в $\mathbb{R}$, естественным образом сопоставляется некоторое *подмножество* $P^{(A)}_{\Delta}$ в $\mathcal{S}$:

$$P^{(A)}_{\Delta} = \{s \in \mathcal{S} : A(s) \in \Delta\}. \tag{2}$$

В квантовой физике ситуация совершенно иная. Наблюдаемая является симметрическим оператором $\hat{A}$ на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_S$ состояний системы. Спектральное представление оператора $\hat{A}$

$$\hat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\hat{E}^{(A)}_{\lambda} \tag{3}$$

связывает с наблюдаемой A семейство проекционных операторов $\hat{E}^{(A)}_{\lambda}$, зависящих от действительного параметра λ. С высказыванием "$A \in \Delta$" в квантовом случае сопоставляется (замкнутое) *линейное подпространство* $\mathcal{H}^{(A)}_{\Delta}$ в пространстве $\mathcal{H}_S$ всех состояний системы. Проекционный оператор $\hat{P}^{(A)}_{\Delta}$ на это подпространство имеет вид

$$\hat{P}^{(A)}_{\Delta} = \int_{\lambda \in \Delta} d\hat{E}^{(A)}_{\lambda} \tag{4}$$

Аналогично тому, как совокупность подмножеств некоторого множества служит моделью классической логики, совокупность подпространств некоторого гильбертова пространства является основой для построения различных вариантов квантовой логики.

Развитие квантовой логики было инициировано Биркхофом и фон Нейманом [4]. Именно они впервые предложили ассоциировать высказывания о квантовой системе с (замкнутыми) подпространствами её гильбертова пространства $\mathcal{H}_S$. На множестве подпространств можно ввести модели логических связок конъюнкции

$$\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}' =_{df} \mathcal{H} \cap \mathcal{H}', \tag{5}$$

дизъюнкции

$$\mathcal{H} \vee \mathcal{H}' =_{df} \mathcal{H} + \mathcal{H}', \tag{6}$$

являющиеся, соответственно, операциями вычисления точной нижней и верхней граней по отношению к частичному порядку включения в множестве всех подпространств, а также отрицания

$$\neg\mathcal{H} =_{df} \mathcal{H}^{\perp}, \tag{7}$$

где $\mathcal{H}^{\perp}$ – подпространство векторов из $\mathcal{H}_S$, ортогональных любому вектору из $\mathcal{H}$. Имеет место равенство

$$\mathcal{H}_S = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}, \tag{8}$$

где $\oplus$ обозначает прямую сумму подпространств (т.е. $\mathcal{H} + \mathcal{H}^{\perp} = \mathcal{H}_S$ и $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{\perp} = 0$). Из (8) следует

$$\mathcal{H}^{\perp\perp} = \mathcal{H}. \tag{9}$$

По отношению к этому частичному порядку включения среди подпространств есть минимальное, состоящее из нулевого вектора, и максимальное, совпадающее с $\mathcal{H}_S$. Существенно, что дистрибутивность квантовых моделей конъюнкции и дизъюнкции уже не имеет места.

В результате абстрагирования при некотором упрощении структуры отношений в множестве подпространств из $\mathcal{H}_S$ возникает понятие *ортологики* [5], в ранних работах иногда называемой также *минимальной квантовой логикой*. Язык ортологики состоит из множества высказываний и двух базисных логических связок конъюнкции, $\wedge$, и отрицания, $\neg$, ассоциируемых с (5) и (7), соответственно. Применение двойного отрицания оставляет утверждение неизменным, согласно (9). Логическая связка дизъюнкции $\vee$ утверждений α и β определяется через $\wedge$ и $\neg$ законом де Моргана:

$$\alpha \vee \beta = \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta). \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что, применительно к множеству подпространств в $\mathcal{H}_S$, данное определение эквивалентно (6).

Алгебраическим представителем ортологики является *ортокомплементарная решётка:*

Определение 1.1

Ортокомплементарная решётка $\mathcal{OL}$ есть ограниченная решётка $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$ (т.е. частично упорядоченное множество L, в котором существуют точные верхние и нижние грани конечных совокупностей элементов, а также $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ – наименьший и наибольший элементы), дополнительно снабжённая операцией вычисления ортодополнения $\{\}^{\perp} : L \to L$ такой, что

(i) $a^{\perp\perp} = a$;

(ii) если $a \le b$, то $b^{\perp} \le a^{\perp}$;

(iii) $a \wedge a^{\perp} = \mathbf{0}$.

Принципиальным является отсутствие в общем случае дистрибутивности в ортологике и реализующих её ортокомплементарных решётках. А именно, как и в любой решётке, имеют место только условия

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \le a \wedge (b \vee c) \tag{11}$$

и

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{12}$$

В этом ортологика отличается от классической логики и реализующих её булевых решёток. Таким образом, неклассичность ортологики и интуиционистской логики топосов, реализуемой алгебрами Гейтинга, состоит в отказе от дистрибутивности в первом случае и от тождественности двойного отрицания во втором.

Как уже указывалось выше, представляет значительный интерес поиск естественной реализации ортологики, как одной из простейших квантовых логик, в рамках топосного подхода к ветвящемуся пространству-времени. Будем руководствоваться следующим обстоятельством. Помимо алгебраической реализации ортологики ортокомплементарными решётками существует эквивалентный альтернативный способ, предложенный изначально в [6], представления ортологики в терминах семантики Крипке возможных миров. А именно, предполагается, что каждому высказыванию α можно сопоставить множество миров, в которых данное высказывание истинно. Миры Белнапа представляют собой естественный материал построения семантики Крипке. Ниже будет показано как на этом пути в рамках топосного подхода возникает структура локальных ортологик, привязанных к каждому событию из $\mathcal{C}$.

2 Локальные ортологики

Основой введения структуры локальных ортологик в рамках топосного подхода нам послужит пара предпучков $\langle \mathbf{Loc}, \mathbf{Acc} \rangle$, т.е. контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в Set. Функтор $\mathbf{Loc}$ был определён в работе [1]. Напомним, что для каждого события e множество $\mathbf{Loc}_e$ образовано всеми мирами Белнапа, содержащими e. Определяя функтор $\mathbf{Acc}$, положим

$$\mathbf{Acc}_e = \{\langle w_1,\, w_2 \rangle \in \mathbf{Loc}_e \times \mathbf{Loc}_e : \exists e \rightsquigarrow e' \,(e' \neq e,\, e' \in w_1,\, e' \in w_2)\} \tag{13}$$

Для каждой причинной стрелки $e_1 \rightsquigarrow e_2$ имеет место отображение вложения $\mathbf{Acc}_{e_1 e_2} : \mathbf{Acc}_{e_2} \to \mathbf{Acc}_{e_1}$, так что $\mathbf{Acc}$ действительно является контравариантным функтором из $\mathcal{C}$ в Set. Множество $\mathbf{Acc}_e$ определяет *отношение достижимости* для пар миров из $\mathbf{Loc}_e$ [2]. Согласно определения (13) миры w_1 и w_2 удовлетворяют отношению достижимости в e т. и т.т., когда событие e не является последним общим событием этих миров. Отношение достижимости рефлексивно и симметрично, но в общем случае не транзитивно. Используя отношение $\mathbf{Acc}_e$ можно ввести операцию $\{\}^{\perp}$ на множестве-степени $\mathcal{P}(\mathbf{Loc}_e)$:

$$X \mapsto X^{\perp} =_{df} \ \{w \in \mathbf{Loc}_e : \forall w'(w' \in X \Rightarrow \langle w,\, w' \rangle \notin \mathbf{Acc}_e)\}, \tag{14}$$

где $X \subseteq \mathbf{Loc}_e$. Имеет место

$$Y \subseteq X \Rightarrow X^{\perp} \subseteq Y^{\perp} \tag{15}$$

для всех $X, Y \subseteq \mathbf{Loc}_e$.

Нетрудно проверить, что результат двойного применения операции (14) можно записать в виде

$$X^{\perp\perp} = \cup\{Y \in \mathcal{P}(\mathbf{Loc}_e) :\, Y \circ \mathbf{Acc}_e \subseteq X \circ \mathbf{Acc}_e). \tag{16}$$

Здесь фигурирует произведение $\circ$ с участием отношений:

$$X' \circ \mathbf{Acc}_e =_{df} \{w \in \mathbf{Loc}_e : \exists w'(w' \in X',\ \langle w', w\rangle \in \mathbf{Acc}_e)\}.$$

Из (16) следует, что

$$X \subseteq X^{\perp\perp} \tag{17}$$

для всех $X \in \mathcal{P}(\mathbf{Loc}_e)$. Комбинация (15) и (17) даёт

$$X^{\perp} = X^{\perp\perp\perp}, \tag{18}$$

откуда (в силу очевидного следствия $X^{\perp\perp} = X^{\perp\perp\perp\perp}$) заключаем, что двойное применение операции (14) определяет *оператор замыкания* [7] на $\mathcal{P}(\mathbf{Loc}_e)$. Известно, что система

$$L_e = \{X \in \mathcal{P}(\mathbf{Loc}_e) : X = X^{\perp\perp}\} \tag{19}$$

замкнутых относительно этого оператора подмножеств содержит пересечение любой совокупности своих элементов:

$$\forall i \in I (X_i \in L_e) \Rightarrow \bigcap_{i\in I} X_i \in L_e.$$

Система L_e частично упорядочена по включениям, содержит минимальное (пустое) множество $\mathbf{0}$ и максимальное множество $\mathbf{1}$, совпадающее с $\mathbf{Loc}_e$. Операции

$$\bigwedge_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i \tag{20}$$

и

$$\bigvee_{i\in I} X_i = \Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big)^{\perp\perp} = \Big(\bigcap_{i\in I} X_i^{\perp}\Big)^{\perp} \tag{21}$$

превращают L_e в полную ограниченную решётку. Операция $\{\}^{\perp}$ является ортодополнением на L_e. *Таким образом в семантике Крипке для каждого события e из $\mathcal{C}$ определена ортокомплементарная решётка $\mathcal{OL}_e = \langle L_e, \wedge, \vee, ^{\perp}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$, представляющая некоторую локальную ортологику.*

3 Естественная топология на $\mathbf{Loc}_e$

Для введения естественной топологии на множествах $\mathbf{Loc}_e$ необходимы некоторые вспомогательные конструкции. Посредством ковариантного функтора $\mathcal{P} : Set \to Set$ степени множества строим предпучок $\mathcal{P} \cdot \mathbf{Loc} : \mathcal{C}^{op} \to Set$. Множество $(\mathcal{P} \cdot \mathbf{Loc})_e$ выше обозначалось как $\mathcal{P}(\mathbf{Loc}_e)$. Введём также $\bar{\mathbf{\Omega}} : \mathcal{C}^{op} \to Set$ – контравариантный функтор, сопоставляющий каждому событию e множество $\bar{\mathbf{\Omega}}_e$ всех корешёт на e. Причинная стрелка $e_1 \rightsquigarrow e_2$ порождает отображение $\bar{\mathbf{\Omega}}_{e_1e_2} : \bar{\mathbf{\Omega}}_{e_2} \to \bar{\mathbf{\Omega}}_{e_1}$ по правилу

$$\bar{\mathbf{\Omega}}_{e_1e_2}(\bar{S}_2) = \{e_1 \rightsquigarrow e : e_2 \rightsquigarrow e \in \bar{S}_2\},$$

где $\bar{S}_2$ – некоторое корешето на e_2.

Для каждого события e определим отображение

$$\nu_e : \bar{\mathbf{\Omega}}_e \to (\mathcal{P} \cdot \mathbf{Loc})_e, \quad \text{где} \quad \nu_e(\bar{S}) = \cup\{\mathbf{Loc}_{e'} : \exists\, e \rightsquigarrow e' \in \bar{S}\}. \tag{22}$$

Отображения ν_e для разных e представляют собой компоненты естественного преобразования $\nu : \bar{\mathbf{\Omega}} \to \mathcal{P} \cdot \mathbf{Loc}$, что следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{\Omega}}_{e_2} & \xrightarrow{\nu_{e_2}} & (\mathcal{P} \cdot \mathbf{Loc})_{e_2} \\ {\scriptstyle \bar{\mathbf{\Omega}}_{e_1e_2}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\mathcal{P} \cdot \mathbf{Loc})_{e_1e_2}} \\ \bar{\mathbf{\Omega}}_{e_1} & \xrightarrow{\nu_{e_1}} & (\mathcal{P} \cdot \mathbf{Loc})_{e_1} \end{array} \tag{23}$$

для любой причинной стрелки $e_1 \rightsquigarrow e_2$.

Теорема 3.1

(a) *на* $\mathbf{Loc}_e$ *существует топология* $\boldsymbol{\tau}_e$*, совокупность открытых множеств которой образована множествами вида* $\nu_e(\bar{S})$*, где* $\bar{S} \in \bar{\mathbf{\Omega}}_e$;

(b) *топология* $\boldsymbol{\tau}_e$ *хаусдорфова т. и т. т., когда каждая пара различных миров Белнапа из* $\mathbf{Loc}_e$ *содержит пару несовместных событий;*

(c) *отображения* $\mathbf{Loc}_{e_1e_2}$ *открыты относительно топологий* $\boldsymbol{\tau}_{e_1}$ *и* $\boldsymbol{\tau}_{e_2}$.

Доказательство: Для доказательства (a) необходимо проверить выполнение свойств открытых множеств совокупностью $\{\nu_e(\bar{S}) : \bar{S} \in \bar{\mathbf{\Omega}}_e\}$. Очевидно, что $\nu_e(\emptyset) = \emptyset$ и $\nu_e(\bar{S}_{max}) = \mathbf{Loc}_e$, так что пустое подмножество в $\mathbf{Loc}_e$ и само $\mathbf{Loc}_e$ открыты. Далее, легко проверить, что

$$\bigcup_{i \in I} \nu_e(\bar{S}_i) = \nu_e(\bigcup_{i \in I} \bar{S}_i). \tag{24}$$

Открытость множества в левой части равенства следует из замкнутости множества корешёт на e относительно любых объединений. Также непосредственно проверяется что

$$\nu_e(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) \subseteq \nu_e(\bar{S}_1) \bigcap \nu_e(\bar{S}_2). \tag{25}$$

Для установления обратного включения рассмотрим мир $w \in \nu_e(\bar{S}_1) \bigcap \nu_e(\bar{S}_2)$. Следовательно, существует пара причинных стрелок: $e \rightsquigarrow e_1 \in \bar{S}_1$ и $e \rightsquigarrow e_2 \in \bar{S}_2$ таких, что $e_1 \in w$ и $e_2 \in w$. Из направленности мира w заключаем о существовании события $e' \in w$, являющегося общим следствием e_1 и e_2: $e_1 \rightsquigarrow e'$ и $e_2 \rightsquigarrow e'$. Вследствие замкнутости корешёт относительно продолжения причинных стрелок имеем $e \rightsquigarrow e' \in \bar{S}_1$ и $e \rightsquigarrow e' \in \bar{S}_2$. Таким образом, $e \rightsquigarrow e' \in \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ и $w \in \nu_e(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2)$. Вместе с (25) имеем

$$\nu_e(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = \nu_e(\bar{S}_1) \bigcap \nu_e(\bar{S}_2). \tag{26}$$

Доказываем утверждение (b). Пусть топология $\boldsymbol{\tau}_e$ хаусдорфова. Дана пара миров $w_1 \neq w_2$ из $\mathbf{Loc}_e$. По предположению существует пара корешёт $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ на e таких, что

$$w_i \in \nu_e(\bar{S}_i) \ (i = 1, 2); \quad \nu_e(\bar{S}_1) \cap \nu_e(\bar{S}_2) = \emptyset.$$

Следовательно, существует пара причинных стрелок $e \rightsquigarrow e_i \in \bar{S}_i$; $e_i \in w_i$ $(i = 1, 2)$. События e_1 и e_2 несовместны. Пусть теперь в любой паре миров $w_1 \neq w_2$ из $\mathbf{Loc}_e$ есть несовместные события $e'_i \in w_i$ $(i = 1, 2)$. В силу направленности миров Белнапа для e и e'_i в w_i существует общее следствие e_i, т.е. $e \rightsquigarrow e_i$ и $e_i \in w_i$ $(i = 1, 2)$. События e_1 и e_2 также несовместны вследствие замкнутости миров Белнапа относительно событий-причин. Строим корешёта $\bar{S}_i = \{e \rightsquigarrow e''_i : \exists e_i \rightsquigarrow e''_i\}$. Легко заметить, что любая пара стрелок из $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ оканчивается в несовместных событиях. Следовательно, $\nu_e(\bar{S}_1) \cap \nu_e(\bar{S}_2) = \emptyset$, т.е. миры w_1 и w_2 имеют непересекающиеся окрестности. Утверждение (b) доказано.

Утверждение (c) непосредственно следует из коммутативности диаграммы (23). $\Box$

Из последнего пункта теоремы имеем

Следствие:

Сопоставление $e \mapsto \boldsymbol{\tau}_e$ *функторально, т.е. определяет предпучок локальных топологий* $\boldsymbol{\tau} : \mathcal{C}^{op} \to Set$*, являющийся подобъектом в* $\mathcal{P}\cdot\mathbf{Loc}$*; при этом* $\boldsymbol{\tau}_{e_1e_2} : \boldsymbol{\tau}_{e_2} \to \boldsymbol{\tau}_{e_1}$ *есть простое ограничение отображения* $(\mathcal{P}\cdot\mathbf{Loc})_{e_1e_2}$ *на* $\boldsymbol{\tau}_{e_2}$.

В выражениях (24) и (26) структура множества корешёт $\bar{\boldsymbol{\Omega}}_e$ связана со структурой открытых множеств топологии $\boldsymbol{\tau_e}$. Рассмотрим иные аспекты этой связи.

Введём отображения

$$\mu_e : (\mathcal{P}\cdot\mathbf{Loc})_e \to \bar{\boldsymbol{\Omega}}_e, \quad \text{где} \quad \mu_e(X) = \{e \rightsquigarrow e' : \mathbf{Loc}_{e'} \cap X = \emptyset\}. \tag{27}$$

Нетрудно убедиться, что μ_e являются компонентами естественного преобразования $\mu : \mathcal{P}\cdot\mathbf{Loc} \to \bar{\boldsymbol{\Omega}}$, т.е. морфизмом из $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, направленным противоположно морфизму (22).

Как известно, множество $\bar{\boldsymbol{\Omega}}_e$ корешёт на e несёт структуру алгебры Гейтинга [8], в которой определена (локальная) операция отрицания, известная также как псевдодополнение:

$$\neg_e : \bar{\boldsymbol{\Omega}}_e \to \bar{\boldsymbol{\Omega}}_e, \quad \text{где} \quad \neg_e\bar{S} = \bigcup\{\bar{S}' \in \bar{\boldsymbol{\Omega}}_e : \bar{S} \cap \bar{S}' = \emptyset\}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\neg_e\bar{S} = \{e \rightsquigarrow e' : \forall e \rightsquigarrow e''\, (e \rightsquigarrow e'' \in \bar{S} \Rightarrow \mathbf{Loc}_{e'} \cap \mathbf{Loc}_{e''} = \emptyset)\} = \mu_e \cdot \nu_e(\bar{S}). \tag{28}$$

Следовательно, операция отрицания $\neg : \bar{\boldsymbol{\Omega}} \to \bar{\boldsymbol{\Omega}}$ оказывается композицией естественных преобразований:

$$\neg = \mu \cdot \nu. \tag{29}$$

Композиция $\nu \cdot \mu : \mathcal{P}\cdot\mathbf{Loc} \to \mathcal{P}\cdot\mathbf{Loc}$ также достойна внимания. Имеет место

Лемма 3.2

Если $\nu_e(\bar{S}) \cap \nu_e(\bar{S}') = \emptyset$*, то* $\bar{S}' \subseteq \neg_e\bar{S}$.

Доказательство использует (28) и тот факт, что из $e \rightsquigarrow e' \in \bar{S}$ и $e \rightsquigarrow e'' \in \bar{S}'$ следует $\mathbf{Loc}_{e'} \cap \mathbf{Loc}_{e''} = \emptyset$. $\Box$

Легко заметить, что из леммы следует тождество $\nu_e(\neg_e\bar{S})$ и внутренней части внешности множества $\nu_e(\bar{S})$. Используя (29), этот результат можно записать в виде

$$Int_{\boldsymbol{\tau}_e}(\mathbf{Loc}_e \backslash \nu_e(\bar{S})) = \nu_e(\mu_e \cdot \nu_e(\bar{S})) \equiv \nu_e \cdot \mu_e(\nu_e(\bar{S})). \tag{30}$$

Это соотношение позволяет трактовать ограничение композиции $\nu_e\cdot\mu_e$ на $\boldsymbol{\tau}_e$ *как псевдодополнение в топологии* $\boldsymbol{\tau}_e$ *– операцию вычисления внутренней части внешности открытого множества.*

Известно, что совокупность открытых множеств любого топологического пространства, также как и совокупность корешёт, имеет структуру алгебры Гейтинга, с обычными операциями пересечения и объединения, моделирующими, соответственно, конъюнкцию и дизъюнкцию, и операцией вычисления псевдодополнения, моделирующей отрицание. Таким образом, из приведённых рассуждений следует

Предложение 3.3

Естественные преобразования

$$\mu \cdot \nu : \bar{\boldsymbol{\Omega}} \to \bar{\boldsymbol{\Omega}} \tag{31}$$

и

$$\nu \cdot \mu : \boldsymbol{\tau} \to \boldsymbol{\tau} \tag{32}$$

являются псевдодополнениями, соответственно, в предпучке корешёт и предпучке введённых в теореме 3.1 топологий. $\square$

Имеет место простая, но важная теорема, связывающая топологию $\boldsymbol{\tau}_e$ на $\mathbf{Loc}_e$ с локальной ортологикой $\mathcal{OL}_e$.

Теорема 3.4

Высказывания из ортологики $\mathcal{OL}_e$ замкнуты относительно топологии $\boldsymbol{\tau}_e$.

Доказательство: Каждое высказывание из $\mathcal{OL}_e$ имеет вид $X^{\perp}$, где X некоторое подмножество из $\mathbf{Loc}_e$. Пусть дан мир Белнапа: $w_0 \notin X^{\perp}$. Из (14) следует существование мира $w_1 \in X$ такого, что $\langle w_1,\, w_0\rangle \in \mathbf{Acc}_e$. Иначе говоря, существует причинная стрелка $e \rightsquigarrow e_0 : w_1, w_0 \in \mathbf{Loc}_{e_0}$. Строим корешето $\bar{S}_0 = \{e \rightsquigarrow e' : \exists e_0 \rightsquigarrow e'\}$. Имеем $w_0 \in \nu_e(\bar{S}_0)$. Нетрудно убедиться, что $\nu_e(\bar{S}_0) \bigcap X^{\perp} = \emptyset$. Действительно, пусть существует мир $w' \in \nu_e(\bar{S}_0) \bigcap X^{\perp}$. Из (14) и $w' \in X^{\perp}$ следует $\langle w_1,\, w'\rangle \notin \mathbf{Acc}_e$. С другой стороны из $w' \in \nu_e(\bar{S}_0)$ следует существование некоторой причинной стрелки $e_0 \rightsquigarrow e'$ такой, что $w' \in \mathbf{Loc}_{e'}$. Из замкнутости миров по отношению к причинам имеем $e_0 \in w'$. Следовательно, $e_0 \in w_1 \cap w'$. Но, поскольку $e \rightsquigarrow e_0$, имеем $\langle w_1,\, w'\rangle \in \mathbf{Acc}_e$ в противоречии с предыдущим результатом. Таким образом, существует открытая окрестность $\nu_e(\bar{S}_0)$ мира w_0, лежащая во внешности рассматриваемого высказывания. Т.к. это верно для любого мира из внешности высказывания $X^{\perp}$, оно оказывается замкнутым в топологии $\boldsymbol{\tau}_e$. $\square$

4 Заключение

Таким образом, в рамках топосного подхода возможно с каждым событием e связать локальную ортологику $\mathcal{OL}_e$. Интуиция предлагает ассоциировать локальную ортологику с "квази-квантовым" приближением ортокомплементарной решётки подпространств некоторого *локального* гильбертова пространства $\mathcal{H}_e$. Это есть пространство состояний внешней реальности для *локального* наблюдателя в e. Следуя аргументам из Введения, высказываниям "$A \in \Delta$" данного наблюдателя должны сопоставляться подпространства из $\mathcal{H}_e$, т.е. линейные многообразия, замкнутые относительно стандартной топологии гильбертова пространства. С этой точки зрения обнаружение в $\mathbf{Loc}_e$ естественной топологии $\boldsymbol{\tau_e}$ и теорема 3.4 о замкнутости относительно этой топологии высказываний в локальной ортологике $\mathcal{OL}_e$ представляются важными аргументами в поддержку предлагаемой интуитивной интерпретации статуса локальных ортологик как локальных "предквантовых логик".

Список литературы

[1] Л.В. Ильичёв, "Теоретико-топосный подход к описанию ветвящегося пространства-времени", сайт МЦЭИ (2008).

[2] N. Belnap, "Branching space-time", *Synthese*, **92** (1992), 385.

[3] A. Döring and C.J. Isham, "A topos foundation for theories of physics", arXiv: quant-ph/0703060, 0703062, 0703064, 0703066 (2007).

[4] G. Birkhoff and J. von Neumann, "The logic of quantum mechanics", *Annals of Mathematics*, **37** (1936), 823.

[5] M.L. Dalla Chiara and R. Guintini, "Quantum logics", arXiv: quant-ph/0101028 (2001).

[6] E.B. Dishkant, "Semantic of the minimal logic of quantum mechanics", *Studia Logica*, **30** (1972), 17.

[7] S. Burris and H.P. Sankappanavar, "A Course in Universal Algebra", The Millenium Edition.

[8] R. Goldblatt, "Topoi: The categorial analisis of logic", Nort-Holland (1979) (Перевод: Р. Голдблатт. "Топосы: Категорный анализ логики", М.: Мир (1983)).