Классический предел в квантовой механике и предпочтительный базис

М.А.Марков, В.Ф.Муханов

Труды ФИАН, 1989, том 197, стр. 3-7

1 Введение

В квантовой теории физическая система характеризуется вектором соответствующего гильбертова пространства $|\psi\rangle$, в котором заключена вся информация о состоянии системы. Для интерпретации вектора $|\psi\rangle$ обычно необходимо найти разложение этого вектора в некотором базисе исходного гильбертова пространства. Хотя все различные разложения и эквивалентны с точки зрения математического аппарата теории , при сопоставлении элементов математического аппарата элементам реальности эта эквивалентность нарушается. Так, в копенгагенской концепции квантовой теории при рассмотрении конкретного эксперимента выделенным (предпочтительным) оказывается набор векторов, к которым может редуцироваться исходный вектор "состояния"системы в результате измерения. В многомировой версии квантовой теории [1,2] существует также предпочтительный базис, который характеризует ансамбль миров, описываемых квантовой механикой [3]. В каждый момент времени конкретному элементы этого предпочтительного базиса сопоставляется конкретная вселенная. Таким образом, предпочтительный базис определяет схему сопоставления абстрактного вектора $|\psi\rangle$ гильбертова пространства элементам реальности (набору вселенных). В дальнейшем мы будем рассматривать только многомировую концепцию квантовой теории.

В ряде работ [3-5] были предложены различные рецепты выбора предпочтительного базиса. Подробный анализ этих предпочтительных базисов будет дан в расширенном варианте статьи. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы описать классический предпочтительный базис (и его возможное квазиклассическое обобщение), который, с нашей точки зрения является не только наиболее естественным, но также необходимым и достаточным для сопоставления наблюдательных данных теории. Для этого вначале кратко остановимся на не совсем тривиальном вопросе о классическом пределе квантовой механики.

2 Классический предел квантовой механики

Как известно, поведение макроскопических объектов подчиняется законам классической механики. С другой стороны, поскольку любой макрообъект состоит из микрообъектов, каждый из которых описывается квантовой механикой, и нет причин для того, чтобы исключить применимость квантовых законов к системам, содержащим большое число частиц [6], должно быть возможно и квантово-механическое описание макрообъектов. Следовательно, классические законы должны вытекать из квантово-механических законов в соответствующем предельном случае. Вопрос о переходе от уравнения Шредингера к уравнениям классической физики обычно чётко формулируется и решается только в случае простых конкретных физических систем [7]. Понятие классической системы также можно определить только в рамках конкретной физической проблемы.

В любом эксперименте наблюдатель *непосредственно* воспринимает лишь совокупность классических данных $\mathcal{M}^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$) о состоянии подсистем исследуемой физической системы. Эти данные всегда известны с ограниченной степенью точности $\delta\mathcal{M}^\alpha$. Мы будем называть классическими такие подсистемы полной системы, состояние которых в рамках поставленной задачи однозначно характеризуется набором *макроскопических* операторов $\hat{M}^\alpha$, сопоставляемый наблюдаемым классическим величинам $\mathcal{M}^\alpha$. Оператор называется макроскопическим, если существует (сверх)*полная* система векторов $|\psi_i\rangle$ в гильбертовом пространстве рассматриваемой подсистемы таких, что величины $\bar{M}_i = \langle\psi_i|\hat{M}|\psi_i\rangle$ удовлетворяют классическим уравнениям движения с точностью, превышающей $\delta\mathcal{M}^\alpha$.

Можно показать, что для любого вектора $|\psi_i\rangle$ в этом случае выполняются следующие соотношения:

$$\langle\psi_i|(\hat{M}^\alpha - \bar{M}^\alpha)^2|\psi_i\rangle^{1/2} \ll \bar{M}^\alpha,\ \delta\mathcal{M}^\alpha\ etc. \tag{1}$$

Кроме того, векторы $|\psi_i\rangle$ и $|\psi_j\rangle$ можно различить, только если они отвечают классически различимым состояниям, т.е. если для какого-либо α

$$|\bar{M}_i^\alpha - \bar{M}_j^\alpha| > \delta\mathcal{M}^\alpha. \tag{2}$$

Если для состояний i и j условия (2) не будут выполнены, эти состояния мы будем идентифицировать и индексы i использовать в дальнейшем только для различимых состояний. В случае суперпозиции волновых функций $|\psi_i\rangle$ и $|\psi_j\rangle$, $i \neq j$ (состояние типа "кота Шредингера"[8]):

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_i\rangle + \beta|\psi_j\rangle,\ \alpha \sim \beta, \tag{3}$$

уравнения для средних $\bar{M} = \langle\psi|\hat{M}|\psi\rangle$, получаемые из уравнения Шредингера, представляют собой сумму двух классических уравнений (с весами $|\alpha|^2$ и $|\beta|^2$ для $\bar{M}_i = \langle\psi_i|\hat{M}|\psi_i\rangle$ и $\bar{M}_j = \langle\psi_j|\hat{M}|\psi_j\rangle$). Поэтому естественно считать, что волновая функция (3) описывает совокупность двух типов классически различимых ансамблей вселенных. В данном случае векторы $|\psi_i\rangle$ и $|\psi_j\rangle$ являются компонентами предпочтительного базиса, определяющими различные вселенные.

Естественно, что классические уравнения не являются точными. Квантовые поправки к ним обусловливают интерференционное взаимодействие между различными вселенными. Однако эти поправки малы по сравнению с $\delta\mathcal{M}^\alpha$ и поэтому взаимодействие между вселенными меньше точности определения вселенных. Классически различные вселенные в рассматриваемом приближении не взаимодействуют и развиваются независимо.

3 Предпочтительный базис

Основываясь на предыдущем рассмотрении, можно сформулировать общее правило для выбора предпочтительного базиса, определяющего совокупность вселенных, описываемых заданной волновой функцией. Поскольку наблюдатель обнаруживает микромир лишь в форме макроскопических явлений, для него различные вселенные имеют интерпретационный смысл лишь постольку, поскольку они макроскопически (классически) различаются. Бессмысленно говорить о микроскопически различных вселенных, так как взаимодействие (интерференция) таких вселенных слишком велико.

Определение предпочтительного базиса основывается на следующем факте: наблюдаемый мир макрообъектов является классическим миром.

Рассмотрим систему, описываемую полной волновой функцией $|\psi(\ldots)\rangle$. Задав точности определения классических наблюдаемых системы, выделим в полной физической системе все возможные классические подсистемы M_1, $M_2, \ldots$, характеризуемые наборами макроскопических операторов $\hat{M}_1^{\alpha}$, $\hat{M}_2^{\beta}, \ldots$ Каждая из этих подсистем описывается своим гильбертовым пространством $\mathcal{H}^{M_n}$. В гильбертовых пространствах $\mathcal{H}^{M_1}$, $\mathcal{H}^{M_2}, \ldots$ выделим подпространства $\mathcal{H}_i^{M_n}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, векторы которых отвечают определённым классическим состояниям (см. раздел 2), так что для любого $|\psi_i^{M_n}\rangle \in \mathcal{H}_i^{M_n}$ выполняются соотношения

$$\langle\psi_i^{M_n}|(\hat{M}_n^{\delta} - \bar{M}_n^{\delta})^2|\psi_i^{M_n}\rangle^{1/2} < \delta\mathcal{M}_n^{\delta} \ll \bar{M}_n^{\delta}, \ldots \; etc. \tag{4}$$

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ всей системы строится как прямое произведение соответствующих гильбертовых пространств

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{M_1} \otimes \mathcal{H}^{M_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}^{M_n} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{mic}, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{H}^{M_n} = \mathcal{H}_1^{M_n} \oplus \mathcal{H}_2^{M_n} \oplus \ldots \tag{6}$$

и $\mathcal{H}_{mic}$ – гильбертово пространство микроскопических подсистем полной динамической системы.

Классический предпочтительный базис определим следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} |\psi_{11\ldots1\ldots}^{pref}\rangle & = & |\psi_1^{M_1}\rangle \otimes |\psi_1^{M_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_1^{M_n}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{mic}\rangle, \\ |\psi_{21\ldots1\ldots}^{pref}\rangle & = & |\psi_2^{M_1}\rangle \otimes |\psi_1^{M_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_1^{M_n}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{mic}\rangle, \\ \ldots\ldots & & \\ |\psi_{ij\ldots k\ldots}^{pref}\rangle & = & |\psi_i^{M_1}\rangle \otimes |\psi_j^{M_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_k^{M_n}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{mic}\rangle, \\ \ldots\ldots & & \end{array} \tag{7}$$

Точность определения векторов (7) достаточна для однозначного сопоставления теории наблюдения. Отметим, что соответствующий базис $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{mic}$ фиксируется автоматически с точностью, определяемой погрешностями $\delta\mathcal{M}$ классических наблюдаемых $\mathcal{M}$.

4 Теория измерений

Продемонстрируем, как работает предложенный рецепт выбора базиса в теории измерений. Рассмотрим квантовую систему S с волновой функцией $|\psi_S\rangle$, взаимодействующую с прибором M, измеряющим величину $\mathcal{A} \leftrightarrow \hat{A}$ системы S. Прибор должен быть классическим объектом и его показания характеризуются классической наблюдаемой $\mathcal{M}$ (отклонением стрелки), которой сопоставляется макроскопический оператор $\hat{M}$. В пространстве волновых функций прибора можно выделить подпространства $\mathcal{H}^M_{A_n}$ такие, что для $|\psi^M_{A_n}\rangle \in \mathcal{H}^M_{A_n}$

$$\langle\psi^M_{A_n}|(\bar{M} - \bar{M}[A_n])^2|\psi^M_{A_n}\rangle^{1/2} \ll \delta\mathcal{M}[A_n],\ \bar{M}[A_n], \dots\ etc, \tag{8}$$

где $\bar{M}[A_n] = \langle\psi^M_{A_n}|\hat{M}|\psi^M_{A_n}\rangle$ и $\delta\mathcal{M}[A_n]$ – погрешность фиксации положения "стрелки". Если начальный волновой вектор системы S является собственным вектором оператора $\hat{A}$, отвечающим собственному значению A_k, то результат взаимодействия системы S с прибором M должен иметь вид

$$|\psi^S_{A_k}\rangle|\psi^M_0\rangle \to |\psi^S_{A_k}\rangle|\psi^M_{A_k}\rangle, \tag{9}$$

где $|\psi^M_0\rangle$ – вектор, отвечающий начальному состоянию прибора. Условие (9) является *необходимым* условием осуществимости *хорошего* измерения величины $\mathcal{A}$ прибором M [9]. Если

$$|\psi^S\rangle = \sum_l a_l|\psi^S_{A_l}\rangle, \tag{10}$$

то из (9) и линейности уравнения Шредингера получаем

$$|\psi^S\rangle|\psi^M_0\rangle \to \sum_l a_l|\psi^S_{A_l}\rangle|\psi^M_{A_l}\rangle. \tag{11}$$

Различным членам суперпозиции (11) отвечают классически различные вселенные (в них отличаются "показания стрелки"прибора $\mathcal{M} = \bar{M}[A_i]$). Базис $|\psi^S_{A_i}\rangle|\psi^M_{A_i}\rangle$ является предпочтительным базисом, поскольку для его векторов удовлетворяются условия (4).

Для микросистемы S компонентами предпочтительного базиса являются собственные вектора оператора $\hat{A}$: $|\psi^S_{A_k}\rangle$. Выбор компонент предпочтительного базиса единствен. Действительно, допустим, что существует другой предпочтительный базис $|\tilde{\psi}^S_m\rangle$ для системы S. Тогда волновую функцию всей системы после измерения можно представить в виде

$$|\psi^S\rangle = \sum_m \tilde{a}_m|\tilde{\psi}^S_m\rangle|\tilde{\psi}^M_m\rangle, \tag{12}$$

где $|\tilde{\psi}^M_m\rangle$ – векторы гильбертова пространства прибора. Разложим $|\psi^S_{A_l}\rangle$ по $|\tilde{\psi}^S_m\rangle$:

$$|\psi^S_{A_l}\rangle = \sum c_{lm}|\tilde{\psi}^S_m\rangle. \tag{13}$$

В (13) по меньшей мере два из коэффициентов c_{lm} существенно отличаются от нуля, поскольку $|\tilde{\psi}^S_m\rangle \neq |\psi^S_{A_m}\rangle$ ни на каких A_m. Подставляя (13) в правую часть (11) и сравнивая полученное выражение с (12), находим

$$|\tilde{\psi}^M_m\rangle = \sum_l a_l\, c_{lm}|\psi^M_{A_l}\rangle\Big(\sum_k |a_k|^2|c_{km}|^2\Big)^{-1/2}. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что $|\tilde{\psi}^M_m\rangle$ не принадлежит $\mathcal{H}^M_{A_l}$ ни при каких A_l, поскольку для (14) не удовлетворяются условия (4). Следовательно, базис $|\tilde{\psi}^S_m\rangle$ не является предпочтительным.

5 Заключительные замечания

Выше, задав погрешность $\delta\mathcal{M}$ значений классических наблюдаемых $\mathcal{M}$, мы определили ансамбль вселенных, которые можно рассматривать как классически различающиеся невзаимодействующие вселенные. В понятие "невзаимодействующие"вкладывается здесь тот смысл, что интерференционное влияние одних вселенных на другие приводит к поправкам в $\mathcal{M}$, меньшим $\delta\mathcal{M}$, и поэтому не может быть обнаружено. Уменьшая $\delta\mathcal{M}$ (т.е. повышая точность классического прибора), мы в конце концов достигнем значения, равного квантово-механической дисперсии δM_q оператора $\hat{M}$ для состояний $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i^M$. Величина δM_q не может быть меньше некоторого минимального значения, определяемого параметрами системы. Это связано с некоммутативностью канонически сопряжённых операторов, т.е. с принципом неопределённости. Точность классического прибора не может превышать квантово-механической неопределённости δM_q. Если мы захотим придать более точный смысл оператору $\hat{M}$, то придётся рассматривать "прибор"квантово-механически.

Представление о реальности как о совокупности ансамблей "невзаимодействующих"вселенных имеет смысл и в отсутствие наблюдателя. В этом случае, когда квантовые флуктуации δM_q малы по сравнению со средними значениями операторов, характеризующих состояния макроскопических подсистем ($\delta M_q \ll \bar{M}, \ldots$), справедливо квазиклассическое приближение и в качестве $\delta\mathcal{M}$ естественно выбрать δM_q, т.е. $\delta\mathcal{M} \sim \delta M_q$. При этом различные вселенные являются слабо взаимодействующими. Именно в этом смысле волновую функцию Хартля-Хокинга [10] можно интерпретировать как описывающую ансамбль классически различных вселенных [11].

Если же дисперсии всех операторов $\hat{M}$ сравнимы со средними (т.е. $\delta M_q \sim \bar{M}$), то говорить о *различных* вселенных не имеет смысла, поскольку поправки за счёт взаимодействия (интерференции) для любым образом выделенных вселенных будут превышать точность определения этих вселенных. В данном случае реальность более естественно представлять себе как ансамбль тесно переплетённых вселенных, не имеющих индивидуальных свойств, отличающих их друг от друга, поскольку слишком сильно интерференционное взаимодействие между ними.

Список литературы

[1] *Everett III H.* "Relative state"formulation of quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1957, **29** 454-462.

[2] The many-world interpretation of quantum mechanics / Eds. B. DeWitt, N. Graham. Princeton: Univ. press, 1973. 254 p.

[3] *Deutsch D.* Quantum theory as universal physical theory // Intern. J. Theor. Phys. 1985, **24** 1-41.

[4] *Zurek W.H.* Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave-packet collapse? // Phys. Rev. D. 1981, **24** 1516-1536.

[5] *Page D.N.* Information basis of states for quantum measurements: Prepr. Pensilv. State. Univ. 1984. 20 p.

[6] *Legett A.J.* Schrödinger's cat and her laboratory cousins // Contemp. Phys. 1984, **25** 583-598.

[7] *Bohm D.* Quantum theory. New York: Prentice-Hall, 1951. 534 p.

[8] *Schrödinger E.* Die gegenwörtige Situation in der Quantenmechanics // Naturwissenschaften. 1935, **23**, 807-849.

[9] *Neumann J. von.* Mathematical foundations of quantum mechanics. Princeton: Univ. press, 1955. 400 p.

[10] *Hartle J.B, Hawking S.W.* Wave function of the universe // Phys. Rev. D. 1983, **28** 2960-2979.

[11] *Mukhanov V.F.* On the many-worlds interpretation of quantum mechanics // Proc. Third Seminar on quantum gravity. Moskow, 1984 / Eds M.A.Markov et al. Singapore: World Sci., 1985, p. 16-38.